

## Elementi di soluzione per la Competizione del 4 marzo 2010

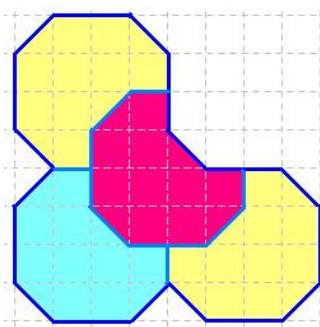
### Esercizio n. 1 – Matemagia (7 punti)

Il mago ovviamente gira il gettone che aveva seguito con gli occhi:

- se questo gettone è del colore di quello che precedentemente era nel mezzo, questo non ha subito scambio, quindi è quello scelto dallo spettatore
- se questo gettone è di un altro colore, allora è quello che è stato scambiato con quello centrale. Perciò il gettone scelto dallo spettatore è del terzo colore.

### Esercizio 2 – Ognuno al suo posto (5 punti)

Ecco la partizione richiesta:



### Esercizio n. 3 – La pietra d'angolo (7 punti)

La pietra alla sommità della piramide è a sua volta una piccola piramide simile alla grande, in scala 1 : 200. Nello strato sottostante, la sezione della piramide è un quadrato di lato doppio, cioè di 220 cm. Il penultimo strato è quindi costituito da 4 pietre angolari congiunte.

Così, la base superiore di ogni pietra d'angolo risulta un quadrato di lato 55 cm.

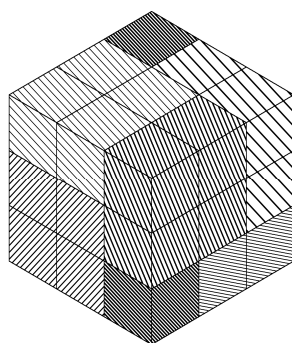
Ecco un possibile sviluppo: le 3 lunghezze segnate in figura sono sufficienti per individuarlo. Le altre possono essere riportate col compasso.

### Esercizio n. 4 – 3D (5 punti)

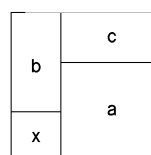
Ecco la soluzione e la rappresentazione delle sezioni ad ogni strato

Le 6 facce della composizione presentano lo stesso disegno opportunamente ruotato. I cubi piccoli x, y, z sono disposti su una diagonale.

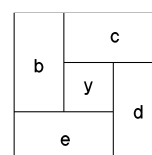
**NB:** le sezioni non sono richieste



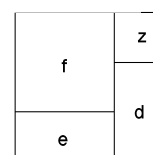
strato 1



strato 2



strato 3



### Esercizio n. 5 – Attenti alla rotta! (7 punti)

Fra le 7 e le 7:05 la petroliera percorre 3 km, poi 6 km nei 10 minuti successivi.

Si tratta di tracciare la carta disegnata a fianco in scala 1:50 000.

Si prolungano i lati del triangolo, poi ci si aiuta con una riga graduata per individuare nel modo più preciso 3 punti D, E, F allineati in modo che  $DE = 3$  cm e  $EF = 6$  cm.

(Calcoli trigonometrici, qui non richiesti, mostrano che la soluzione è unica e che:  $CD \approx 5,19$  ;  $CE \approx 2,34$  e  $BF \approx 1,91$  con approssimazione 0,01)

### Esercizio n. 6 – Il colore dei numeri (5 punti)

1 è rosso.  $1 < 2$ , quindi 2 è rosso.  $2+1 = 3$ , quindi 3 è blu.

$2+1 < 4$ , la somma di tutti rossi minori di 4 è minore di 4 quindi 4 è rosso.

$4+1 = 5$ , 5 è blu.  $4+2 = 6$ , 6 è blu.  $4+2+1 = 7$ , 7 è blu.

$4+2+1 < 8$ , la somma di tutti i rossi minori di 8 è minore di 8 quindi 8 è rosso, etc.

Così saranno rosse tutte le potenze intere di 2 e blu tutti gli altri interi.

(si riconosce la numerazione binaria : ad esempio  $10 = 8+2 = 1010_2$ )

**I rossi minori di 50 sono: 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16 ; 32.**

### Esercizio n. 7 – Davvero impossibile (7 punti)

Sia  $x$  il numero inserito nel disco in basso a sinistra.

Allora, seguendo le frecce, si ottiene la figura a lato.

La somma dei due dischi della linea in basso vale 12, perciò il quadrato compreso fra i dischi **deve contenere necessariamente il 12**.

I numeri nei dischi sono interi naturali, quindi si otterrà una soluzione per tutti i valori interi compresi fra 4 e 9.

**Ci sono pertanto 6 possibilità.**

### Esercizio n. 8 – Quadrati di fiammiferi (5 punti)

Intuitivamente si osserva che sono migliori le disposizioni compatte più vicine al quadrato.

*La dimostrazione, difficile, non è qui richiesta.*

Con 100 fiammiferi si può realizzare un assemblaggio, al massimo, di 43 quadrati. A fianco ci sono tre esempi.

### Esercizio n. 9 – Lavoro in nero (7 punti)

Bisogna considerare il peggiore dei casi: **Goffredo deve prendere 27 oggetti.**

26 non bastano: Goffredo potrebbe infatti avere 20 calzini e 6 guanti sinistri.

Con 27 oggetti avrà almeno 7 guanti, quindi almeno un paio completo; inoltre avrà almeno 15 calzini, quindi parecchie paia coordinate.

### Esercizio n. 10 – La passeggiata della coccinella (10 punti)

Se si indica con  $x$  la distanza DC, si avrà  $CE = \frac{x}{2}$ , poi  $AE = 12 - \frac{x}{2}$  e così di seguito.

$$D = G \text{ porta all'equazione: } \frac{12 - \frac{x}{2}}{2} = 12 - x$$

la cui soluzione è:  $x = 8$ .

**Il punto D si trova quindi a un terzo di BC a partire da B.**

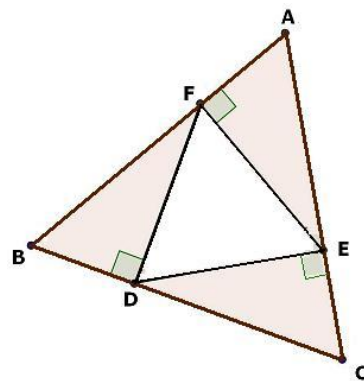
*Altra soluzione senza equazione:*

I triangoli CDE, EAF e FBD sono rettangoli e hanno angoli di  $30^\circ$  e  $60^\circ$ .

Con 3 angoli di  $60^\circ$ , il triangolo DEF è equilatero.

I triangoli CDE, EAF e FBD sono congruenti e i cateti minori sono metà delle ipotenuse.

Quindi il punto D divide il lato BC in due parti l'una doppia dell'altra. Ci sono quindi due soluzioni diverse ma equivalenti: una con  $BD = 2 DC$  e l'altra con  $DC = 2 BD$ .



## Speciale terze

### Esercizio 11 – Sala modulare (5 punti)

Sia  $a$  il numero delle poltrone in una fila.  
Sia  $b$  il numero delle file.

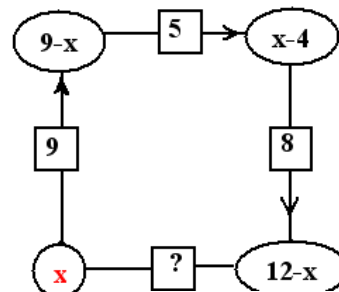
Il problema conduce al seguente sistema:

$$\begin{cases} ab = (a+4)(b-1) \\ ab = (a-11)(b+4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a + 4b = 4 \\ 4a - 11b = 44 \end{cases}$$

La soluzione è:  $a = 44$  e  $b = 12$ .

La configurazione iniziale presenta 12 file di 44 poltrone.

**I posti nella sala pertanto sono 528.**



### Esercizio 12 – Sfida a dadi (7 punti)

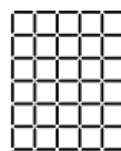
Se si individuano le possibilità con l'aiuto di una tabella 3 x 3, si arriva a: **Antonio vinca su Bernardo è 4/9.**

Se ci si limita a usare numeri interi, i soli dadi che rispondano alle richieste

$C_1$ : 1, 6, 9

$C_2$ : 1, 7, 9.

Sia con  $C_1$  sia con  $C_2$ , Cloe ha 4 possibilità su 9 di vincere su Antc vincere su Bernardo.



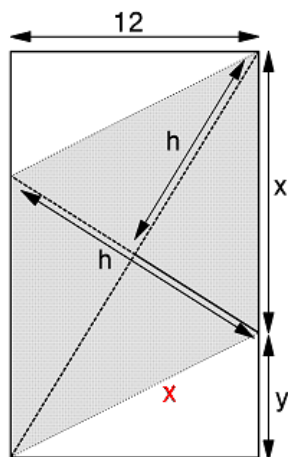
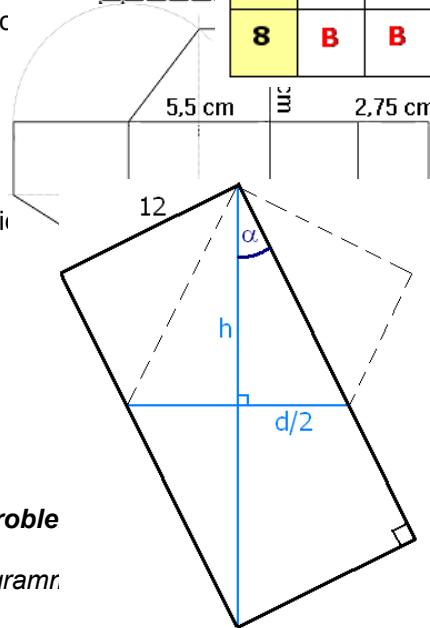
	A	2	4	10
B				
	3	B	A	A
	5	B	B	A
	8	B	B	A

### Esercizio 13 – Cappello cinese (10 punti)

Laura ha piegato il foglio rettangolare facendo coincidere due vertici.  
Se si apre il foglio, si ha la figura qui accanto:

$$h = d \quad \text{se e soltanto se} \quad \text{tg } \alpha = \frac{1}{2}.$$

Si deduce che la lunghezza del foglio è 24 cm.  
Questa risoluzione trigonometrica è la più rapida.



**Ci sono altri modi di risolvere il proble**

*Sul foglio aperto, l'area del parallelogramm. anche 12x.*

*Per il teorema di Pitagora, nel cappello si ha:*

$$h^2 + \frac{h^2}{4} = x^2, \Rightarrow 12x + \frac{12x}{4} = x^2, \text{ da cui } 15x = x^2, \Rightarrow x = 15.$$

*e nel triangolo bianco si ha:*

$$y^2 = 15^2 - 12^2, \Rightarrow y$$

*da cui risulta che la li*

